Feuille 4 – Corrigé

Exercice 1

Montrons d’abord que la somme est directe. Soit , comme , on a forcément (car ), ainsi , mais on a aussi et , donc .

Montrons que . Comme , on a bien sûr Montrons l’inégalité réciproque :

Soit , alors il existe et tels que . Mais , donc il existe et tels que

Ainsi .

Exercice 2

Montrons que . Soit donc . Alors , et comme

est en somme directe avec , donc , donc , donc .

Montrons maintenant que

* Soit alors donc tel que , et , donc

Ainsi comme est un sev, on a , donc .

Ainsi , donc

* Soit , alors ,

Or donc , et

Or est un sev, donc .

Exercice 3

1. Montrons que est un sev de .

La fonction nulle est évidemment -périodique, reste à prouver que toute combinaison linéaire de fonction -périodique l’est également.

Soient et deux fonction -périodiques, alors et

. Ainsi

Ainsi toute combinaison linéaire de fonctions de est un élément de . Donc est un sev de .

Montrons que est un sev de .

La fonction nulle tend évidemment vers 0 en .

Soient , .

Alor

Donc toute combinaison de fonctions de est élément de . Donc est un sev de

1. Soit Alors et pour tout

On peut prouver très facilement que

Ainsi comme on a :

Donc c’est-à-dire est la fonction nulle.

Ainsi et l’autre implication est triviale.

Donc .

1. Soit la fonction définie sur telle que . Montrons que ne peut pas s’écrire comme élément de la somme . Soient , telles que .

on a

Or . C’est absurde, donc et ne sont pas en somme directe.

Exercice 4

1. On ne va en démontrer qu’une, puisque toutes les démonstrations suivent le même schéma.

Soit , alors tels que

car et

Ainsi, on a aussi

Mais la famille est libre, donc

Et donc

On en déduit donc , et l’implication réciproque et évidemment triviale.

1. Le seul moyen que nous disposons pour prouver qu’une somme n’est pas directe et de trouver plusieurs décompositions d’un même vecteur dans

On peut par exemple remarquer que